ЛЕКЦИЯ 4
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГИДРОДИНАМИКИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПО РАДИУСУ ТРУБЫ
УРАВНЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ

Гидравлический радиус и эквивалентный диаметр

При движении жидкостей по каналам произвольной формы, сечение которых отлично от круга, в качестве определяющего линейного размера принимается приведенная величина, которую называют гидравлическим радиусом канала.

Гидравлическим радиусом канала произвольного сечения называют отношение площади поперечного сечения потока S к смоченному периметру $П$.

$$r_г = S/П \tag{4.1}$$

Для круглой трубы при сплошном ее заполнении жидкостью:

$$r_г = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$

Диаметр, выраженный через гидравлический радиус, называют эквивалентным диаметром:

$$d_э = 4r_г = \frac{4S}{П} \tag{4.2}$$

Эквивалентный диаметр канала круглого сечения: $d_э = \dfrac{4\dfrac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d$

Эквивалентный диаметр канала кольцевого поперечного сечения

$$d_э = \frac{4\left(\dfrac{\pi D_{вн}{}^2}{4} - \dfrac{\pi d_{нар}{}^2}{4}\right)}{\pi D_{вн} - \pi d_{нар}} = D_{вн} - d_{нар} \tag{4.3}$$

Эквивалентный диаметр канала прямоугольного сечения (a,b – стороны прямоугольника)

$$d_э = 4r_Г = \frac{4S}{П} = \frac{4ab}{2(a+b)}) = \frac{2ab}{a+b} \tag{4.4}$$

Ламинарное и турбулентное течение. Критерий Рейнольдса.

Английским физиком Осборном Рейнольдсом в 1876–1883 гг. были проведены экспериментальные исследования движения жидкостей при различных скоростях потока, размерах канала и свойствах среды. Для этого им была собрана установка, состоящая из емкости с постоянным уровнем воды, горизонтальной стеклянной трубы и емкости с красящим веществом, которое вводилось в стеклянную трубу по ее оси через тонкую капиллярную трубку (Рис.4.1).

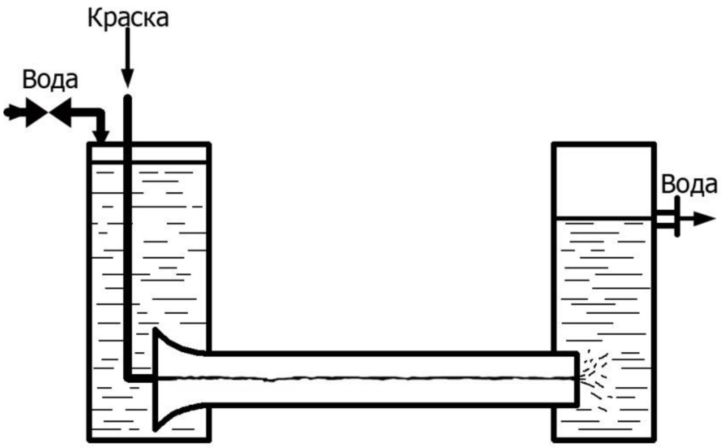

Рис.4.1. Экспериментальная установка для исследования режимов течения жидкости

При небольших расходах (небольших скоростях) воды в стеклянной трубе струйки красящего вещества вытягивались в тонкую нить, т.е. частицы красителя перемещались по параллельным траекториям, не перемешиваясь. Такое движение было названо ламинарным (вязким, струйным, слоистым).

С возрастанием расхода жидкости (скорости) окрашенная струйка приобретала поначалу волнообразное движение, а затем, при дальнейшем увеличении расхода, начинала размываться и полностью окрашивать всю массу жидкости в трубе. Это вызвано возмущением, перемешиванием частиц и вихреобразованием. Движение жидкости, когда основная масса перемещается в одном направлении, а отдельные частицы, или группы частиц, движутся по хаотическим неупорядоченным траектория, называют турбулентным.

Критерием перехода течения из одного режима в другой стал безразмерный комплекс величин, называемый числом (критерием) Рейнольдса Re:

$$Re = \frac{\upsilon l \rho}{\mu} \tag{4.5}$$

где υ – скорость жидкости (м/с), l – определяющий линейный размер (м), ρ - плотность (кг/м^3) и μ -динамическая вязкость (Па.с) жидкости.

Принято считать, что в прямых круглых трубах критическое число Re равно 2 300. При значениях Re < 2 300 режим движения жидкостей и газов ламинарный, течение при 2 300 < Re < 10 000 называется неустойчивым турбулентным, при Re > 10 000 – развитым турбулентным.

Однако экспериментально было найдено, что критическое значение числа Re в круглых трубах может находиться в диапазоне 2 300 ÷ 20 000. Такие высокие значения критического числа Re обусловлены особыми условиями проведения опытов: постоянной температурой, стабилизацией расхода, отсутствием возмущений потока, малыми значениями шероховатости стенок и т.д. Для идеально равномерного профиля скорости на идеально гладкой поверхности критическое число Re стремится к бесконечности. На практике принято считать турбулентным поток при Re > 2300, однако при наличии дополнительных турбулизаторов, ламинарное течение заканчивается при гораздо более низких значениях чисел Рейнольдса.

Турбулентное течение

Развитое турбулентное течение характеризуется сложным перемешиванием жидкости, вихреобразованием и случайными флуктуациями параметров. Так, например, истинная скорость в некоторой точке потока испытывает нерегулярные хаотические пульсации во времени.

Если взять одну фиксированную точку потока, то мгновенная скорость u пульсирует около некоторого среднего во времени значения $\overline{u}$ (Рис. 4.2).

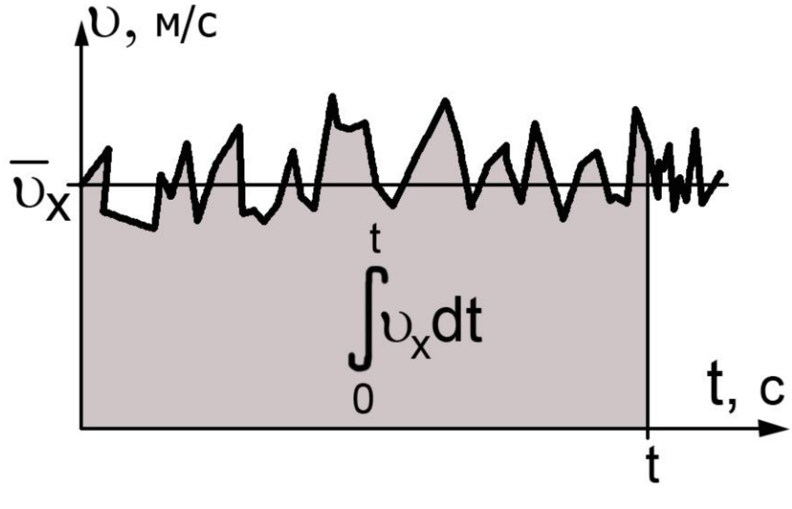

Рис.4.2. Мгновенная υ и осредненная во времени $\overline{\upsilon}$ локальные скорости при турбулентном течении потока

Подобная картина наблюдается в каждой точке турбулентного потока

Турбулентный поток можно описать следующими характеристиками:

1. Осредненная во времени локальная скорость для точки определяется как:

$$\overline{\upsilon_x} = \frac{\int_o^t \upsilon_x dt}{t} \tag{4.6}$$

2. Мгновенная пульсационная скорость - разница между истинной мгновенной и осредненной во времени скоростями. $\Delta\upsilon_x = \upsilon_x - \overline{\upsilon_x}$ или $\upsilon_x = \overline{\upsilon_x} \pm \Delta\upsilon_x$

Если оценивать осредненные за небольшой промежуток времени (секунды) локальные скорости турбулентного потока, то оказывается, что эти значения остаются практически постоянными во времени из-за высокой частоты пульсаций.

Таким образом, турбулентное движение, являющееся неустановившемся, можно рассматривать как квазистационарное.

3. Интенсивность турбулентности.

$$I_T = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\bar{\upsilon}} \tag{4.7}$$

где $\Delta\bar{\upsilon}$ - среднеквадратичное значение пульсационной скорости, т.е. осреднение мгновенных пульсационных скоростей по абсолютной величине во всех направлениях. Эта величина - мера пульсации в данной точке потока. При турбулентном течении по трубам I_T составляет величину 0,01-0,1.

Если средние пульсации скорости одинаковы во всех направлениях, то говорят об изотропной турбулентности.

Турбулентность практически изотропна у оси потока и все более отклоняется от изотропной при приближении к стенке трубы (канала).

4. Вихрем называется единая совокупность частиц, движущихся совместно.

5. Масштаб турбулентности – понятие, связанное с расстоянием между двумя ближайшими частицами жидкости, не принадлежащими одному вихрю.

6. Турбулентная вязкость.

Если в потоке, движущемся в направлении x, расстояние между двумя частицами в направлении перпендикулярном оси трубы $d\bar{n}$, то вследствие разности осредненных во времени скоростей, возникает касательное напряжение, которое определяется по закону внутреннего трения Ньютона:

$$\tau_s = -\mu \frac{d\overline{\upsilon_x}}{d\bar{n}} = -\rho\nu \frac{d\overline{\upsilon_x}}{d\bar{n}} \tag{4.8}$$

В ламинарном потоке мгновенные локальные скорости не нужно осреднять во времени.

В турбулентном потоке перемещения в поперечном направлении создают дополнительное касательное напряжение. По аналогии с ньютоновским касательным напряжением:

$$\tau_T = -\rho \nu_T \frac{d\overline{v_x}}{d\bar{n}} \qquad (4.9)$$

где ν_T - коэффициент турбулентной вязкости. ν_T не является физико-химической константой каждой жидкости, а определяется скоростью жидкости и степенью турбулентности, которая различна на разных расстояниях от оси потока.

Таким образом, для турбулентного потока суммарное касательное напряжение:

$$\tau = \tau_H + \tau_T = -\rho(\nu_H + \nu_T)\frac{d\overline{v_x}}{d\bar{n}} \qquad (4.10)$$

Понятие о пограничном слое

Для описания турбулентного течения жидкости в канале было предложено разделить поток на две области: тонкого вязкого пограничного слоя и области невязкого течения. Такой подход позволил значительно упростить описание движения жидкости.

Центральная часть потока - ядро потока - принято считать областью невязкого течения, т.е. областью, для описания которой применимы уравнения Эйлера.

Вторая область - гидродинамический пограничный слой. Это тонкая область течения, прилегающая к поверхности канала или обтекаемого тела, в которой силы трения велики и сравнимы с силами давления и инерции.

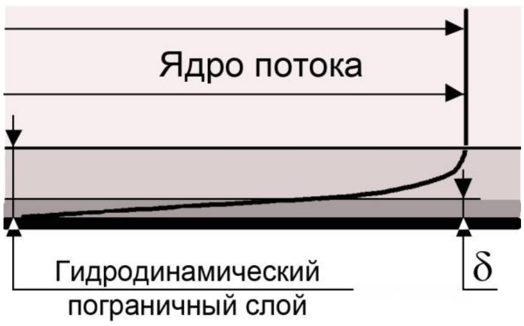

Рис.4.3. Ядро потока и пограничный слой

Толщиной гидродинамического пограничного слоя называется такое расстояние от поверхности, на котором силы трения становятся пренебрежимо малы по сравнению с силами давления и инерции. В пограничном слое скорость резко уменьшается, возникают большие градиенты концентраций, и это свидетельствует о наличии сил трения (закон Ньютона). За пределами пограничного слоя влиянием вязкости можно пренебречь

В пограничном слое движение может быть ламинарным и турбулентным, однако внутри выделяется подслой толщиной δ, в жидкость всегда движется ламинарно из-за наличия близко расположенной стенки.

Также в технике используется понятие вязкого подслоя, в котором влияние вязкости преобладает над влиянием турбулентных пульсаций, т.е. это область, прилегающая к стенке канала, где $\nu > \nu_T$.

Понятие «гидродинамический пограничный слой» очень важно для понимания процессов, происходящих при течении жидкости, а также в процессах тепло- и массообмена.

Распределение скоростей по радиусу трубы постоянного сечения при ламинарном стационарном течении. Уравнение Пуазейля

Рассмотрим ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе круглого сечения. Поток жидкости в трубе мысленно можно разбить на

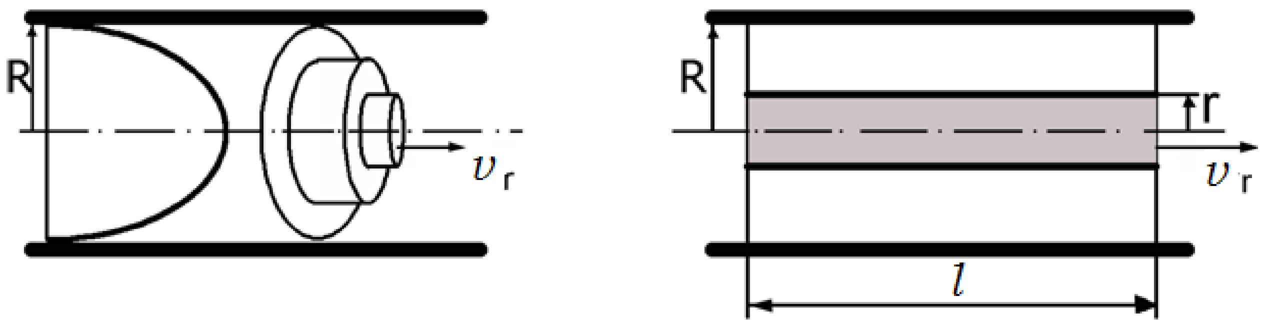

Рис.4.4. К выводу уравнения Пуазейля.

ряд кольцевых слоев, соосных с трубой (Рис.4.4.)

Выделим в потоке жидкости, двигающейся по трубе с радиусом R, цилиндрический слой длиной l и радиусом r. Поскольку все элементы жидкости двигаются с постоянной скоростью (стационарно), то сумма внешних сил, приложенных к выделенному объему, равна нулю. На цилиндрический объем жидкости действуют силы давления и силы трения.

Силы давления действуют на левое и правое основания цилиндра. Результирующая сила давления ΔF_P равна:

$$\Delta F_P = P_1\,\pi r^2 - P_2\,\pi r^2 = \Delta P\,\pi r^2 \qquad (4.11)$$

где P_1 и P_2 – давление на левое и правое основания выделенного цилиндра, πr^2 –площадь основания цилиндра

Движению выделенного цилиндра жидкости радиусом r оказывает сопротивление сила внутреннего трения T (уравнение 1.8):

$$T = -\mu F\frac{d\upsilon_r}{dr} = -\mu 2\pi l r\frac{d\upsilon_r}{dr} \qquad (4.12)$$

где $2\pi rl$ – боковая поверхность цилиндра

Сумма внешних сил должна быть равна нулю с учетом того, что сила внутреннего трения направлена против потока жидкости:

$$\Delta F_P - T = 0 \qquad \text{, отсюда} \qquad (4.13)$$

$$\Delta P\pi r^2 = -\mu 2\pi l r\frac{d\upsilon_r}{dr} \qquad (4.14)$$

Разделим переменные и проинтегрируем.

Пределы интегрирования: при значении радиуса r скорость υ_r;

при значении радиуса $r = R$ скорость $\upsilon_r = 0$.

$$-\int_{\upsilon_r}^{0} d\upsilon_r = \int_r^R \frac{\Delta P\,\pi r^2}{\mu 2\pi l r}dr = \frac{\Delta P}{2\mu l}\int_r^R r\,dr \qquad (4.15)$$

Выражение для распределения скорости по трубе имеет вид:

$$\upsilon_r = \frac{\Delta P}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\Delta P R^2}{4\mu l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (4.16)$$

Значение скорости на оси трубы максимально, т.е. при $r = 0$ получаем:

$$\upsilon = \upsilon_{max} = \frac{\Delta P R^2}{4\mu l} \qquad (4.17)$$

$$\upsilon_r = \upsilon_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.18) выражает собой *параболический закон распределения скорости в сечении трубопровода при установившемся ламинарном движении* *(Закон Стокса)*

Определим расход жидкости в прямой трубе круглого сечения

Запишем элементарный расход жидкости $d\dot{V}$ через кольцевой канал площадью $dS = d\left(\pi r^2\right) = 2\pi r\,dr$:

$$d\dot{V} = \upsilon_r dS = \upsilon_r 2\pi r\, dr \tag{4.19}$$

Проинтегрируем уравнение, используя выражение (4.16)

$$\int_0^{\dot{V}} d\dot{V} = \frac{\Delta P}{4\mu l}\int_0^R (R^2 - r^2)2\pi r dr \tag{4.20}$$

$$\dot{V} = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\mu l} \tag{4.21}$$

или $\dot{V} = \dfrac{\Delta P \pi d^4}{128\mu l}$ (4.22)

Уравнение (4.21) называют уравнением Пуазейля. Согласно уравнению расход вязкой несжимаемой жидкости при ламинарном течении в прямой круглой трубе длиной l определяется перепадом давления на концах трубы и зависит от вязкости жидкости и радиуса (диаметра) трубы в четвертой степени.

Средняя скорость в трубе с поперечным сечением $S = \pi R^2$ может быть вычислена с учетом (4.21) по следующему уравнению:

$$\upsilon_{cp} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\mu l} / \pi R^2 = \frac{\Delta P \pi R^2}{8\mu l} \tag{4.23}$$

Так как по уравнению (4.17) $\upsilon_{max} = \dfrac{\Delta P \pi R^2}{4\mu l}$,

то $\upsilon_{cp} = \dfrac{\upsilon_{max}}{2}$ (4.24)

При ламинарном течении в прямой круглой трубе средняя скорость вязкой несжимаемой жидкости равна половине максимальной, т.е. скорости на оси трубы.

В случае турбулентного течения соотношение между средней и максимальной скоростями зависит от режима течения (Re) и от относительной шероховатости стенок канала. ($\varepsilon = e/d$, где e - средняя высота выступов на стенках трубы, d - диаметр трубы). Т.е. $\upsilon_{cp} = \upsilon_{max} \cdot f(Re,\varepsilon)$, где $f(Re,\varepsilon)\langle 1$.

<u>Эпюры скоростей при ламинарном и турбулентном течении жидкости в трубе</u>

Эпюра скоростей при ламинарном движении жидкости в трубопроводе круглого сечения представляет собой параболоид вращения, ось которого совпадает с геометрической осью трубы.

Эпюра скоростей турбулентного течения построена для значений скоростей осредненных во времени. Этому типу движения характерно выравнивание скоростей в ядре потока и резкое уменьшение скоростей вблизи стенки трубы в пограничном слое.

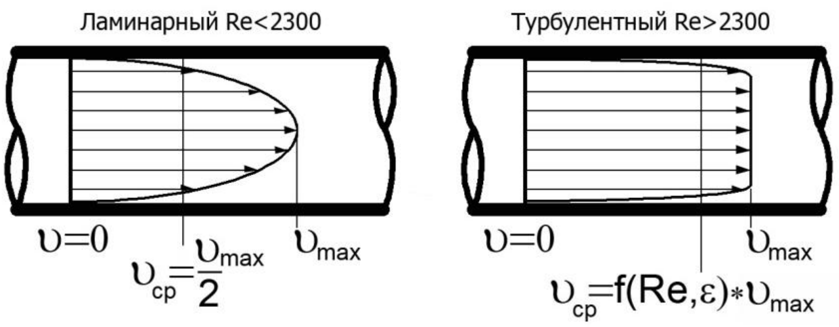

Рис. 4.5. Распределение скоростей в потоке жидкости при ламинарном (слева) и турбулентном (справа) режимах движения